DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE FERMAT

El teorema de Fermat nos indica que no es posible obtener ternas de números enteros positivos **x, a, b**, tales que cumplan la ecuación

$$x^n - b^n = a^n \quad (1)$$

n=número entero positivo; n>2

A.-DEMOSTRACION.

Definimos terna pitagórica de la ecuación (1) al conjunto de términos:

$$(x^{n/2}, b^{n/2}, a^{n/2})$$

De tal manera, que elevando al cuadrado cada uno de ellos se obtienen los términos de la ecuación (1)

El teorema quedará demostrado si se cumple alguna de las tres condiciones siguientes:

a) Si para valores enteros de **a**, no es posible encontrar valores enteros de **x**, y de **b** que satisfagan la ecuación (1)
b) Si para valores enteros de **b**, no es posible encontrar valores enteros de **x**, y de **a** que satisfagan la ecuación (1)
c) Si para valores enteros de **x**, no es posible encontrar valores enteros de **a**, y de **b** que satisfagan la ecuación (1)

-

De las posibles ternas ($x^{n/2}$, $b^{n/2}$, $a^{n/2}$), con x,b,a enteros que pudieran obtenerse (primitivas y no primitivas), en adelante nos referiremos siempre a las ternas primitivas, porque si no es posible encontrar ternas primitivas que cumplan la ecuación (1), tampoco será posible encontrar ternas no primitivas que cumplan dicha ecuación.

Ternas primitivas son aquellas donde el único factor común de ***x,b,a*** *es la unidad*

En orden de magnitud para establecer congruencia con la ecuación (1):

$$x>a$$

$$x>b$$

con la siguiente paridad para completar el concepto de terna primitiva:

$$x=impar$$

$$a=impar$$

$$b=par$$

Supuesto a).-

Para valores enteros de **a**, no es posible encontrar valores enteros de **x**, y de **b** que satisfagan la ecuación (1)

Factorizando la ecuación (1), se obtiene:

$$(x^{n/2}+ b^{n/2})\ (x^{n/2}- b^{n/2})= a^n \qquad (2)$$

Si **a** es entero, demostraremos que no es posible encontrar valores enteros de **x**, y de **b** que cumplan (1)

Establecemos:

$$a^n=\alpha^n \cdot \beta^n$$

a=impar (en ternas primitivas)

α, β=impares

$$\alpha>\beta$$

el mayor divisor común de α, β, es la unidad

Igualando términos:

$$x^{n/2}+ b^{n/2}= \alpha^n$$

$$x^{n/2}- b^{n/2}= \beta^n$$

operando:

$$x^{n/2}= (\alpha^n+ \beta^n)/2 \quad (2)$$

$$b^{n/2}= (\alpha^n- \beta^n)/2 \quad (3)$$

En función de los valores de α y β, se pueden establecer tres grupos:

1.-Ternas donde a=primo, lo que implica:

$$\beta=1$$

$$a^n=a^n \cdot 1^n$$

$$(x^{n/2}+ b^{n/2})\ (x^{n/2}- b^{n/2})= a^n \cdot 1^n$$

Igualando términos:

$$x^{n/2}+ b^{n/2}= \alpha^n$$

$$x^{n/2}- b^{n/2}=1$$

Resultando:

$$x^{n/2}= (\alpha^n+ 1)/2$$

$$b^{n/2}= (\alpha^n- 1)/2$$

Restando:

$$x^{n/2}- b^{n/2}= 1$$

De la ecuación anterior se deduce, que no es posible encontrar valores enteros de **x** y de **b** que cumplan dicha ecuación.

La diferencia de dos enteros **x**, **b** elevados a la potencia **n/2** es siempre mayor que 1.

Así, si n=3, x=5, b=4

$$5^{3/2}-4^{3/2}=3.1833>1$$

Ej. 1

a=7; n=5;

$$a^5= a^5\cdot 1$$

$$x^{5/2}=(7^5+1)/2=8404;$$

$$x=37.1359.....$$

$$b^{5/2}=(7^5- 1)/2=8403$$

$$b=37.1341.....$$

$$x^5- b^5=a^5$$

$$8404^2-8403^2=7^5$$

2.-Ternas donde a no es primo:

$$a^n=\alpha^n \cdot \beta^n$$

a=impar

α y β impares

α> β

el mayor divisor común de α, β, es la unidad

factorizando:

$$(x^{n/2}+ b^{n/2})\ (x^{n/2}- b^{n/2})= \alpha^n\cdot\beta^n$$

Igualando términos:

$$(x^{n/2} + b^{n/2}) = \alpha^n$$

$$(x^{n/2} - b^{n/2}) = \beta^n$$

operando:

$$x^{n/2} = [\alpha^n/(2) + \beta^n/2]$$

$$b^{n/2} = [\alpha^n/(2) - \beta^n/2]$$

resulta:

$$x^{n/2} = \beta^n [\alpha^n/(2 \cdot \beta^n) + 1/2]$$

$$b^{n/2} = \beta^n [\alpha^n/(2 \cdot \beta^n) - 1/2]$$

Como α, β , tienen como único denominador común la unidad, la evaluación de las expresiones:

$$[\alpha^n/(2 \cdot \beta^n) + 1/2]$$

$$[\alpha^n/(2 \cdot \beta^n) - 1/2]$$

generan números racionales no enteros, y por tanto las expresiones:

$$[\alpha^n/(2 \cdot \beta^n) + 1/2]^{2/n}$$

$$[\alpha^n/(2 \cdot \beta^n) - 1/2]^{2/n}$$

generan números irracionales.

El carácter irracional de las expresiones anteriores no se elimina, multiplicando ambas por β^2

$$\beta^2[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)+ 1/2]^{2/n}$$

$$\beta^2 [\alpha^n/(2\cdot \beta^n)- 1/2]^{2/n}$$

Como:

$$x= \beta^2[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)+ 1/2]^{2/n}$$

$$b= \beta^2[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)- 1/2]^{2/n}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce, que no es posible encontrar valores enteros de **x** y de **b** que las cumplan.

Ej 2.- $a=(5\cdot 7)^3=35^3$

$$\alpha^3=7^3$$

$$\beta^3=5^3$$

Las expresiones siguientes, dan como resultado números no enteros

$$[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)+ 1/2]=1.872$$

$$[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)- 1/2]=0.872$$

ya que α y β tienen como denominador común la unidad, y la suma o resta de 1/2, no genera números enteros.

En consecuencia, las expresiones siguientes generan números irracionales.

$$[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)+ 1/2]^{2/n}=1.518928146....$$

$$[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)- 1/2]^{2/n}=0.912734199...$$

El producto de las expresiones anteriores por β^2, no elimina el carácter irracional

$$\beta^2[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)+ 1/2]^{2/n}=37.97320364..$$

$$\beta^2[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)- 1/2]^{2/n}=22.81835497...$$

resultando que los valores de x, y de b no son enteros,

$$x= \beta^2[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)+ 1/2]^{2/n}=37.97320364..$$

$$b= \beta^2[\alpha^n/(2\cdot \beta^n)- 1/2]^{2/n}=22.81835497...$$

cumpliéndose:

$$x^3-b^3=35^3$$

Se concluye que para valores de **a**=enteros, los valores de **x**, y **b** no son enteros

Se cumple por tanto el supuesto a)

Si para valores enteros de a, no es posible encontrar valores enteros de x, y de b que satisfagan la ecuación (1)

Quedando demostrado el T de Fermat.

3.-Resto de ternas donde:

$$a^n = c \cdot d$$

$$c,d = enteros$$

donde ***c,d*** *tienen otros divisores comunes además de la unidad, por lo que las posibles ternas que se obtuviesen de las ecuaciones:*

$$x^{n/2} = (c+d)/2$$

$$b^{n/2} = (c-d)/2$$

no serían primitivas, careciendo su estudio de interés, ya que el teorema se ha demostrado para las ternas primitivas.

Ej3: $n=4$; $a^4 = 35^4 = 1715 \cdot 875$

$$x^{n/2} = (c+d)/2 = (1715+875)/2 = 1295$$

$$b^{n/2} = (c-d)/2 = (1715-875)/2 = 420$$

$$a^{n/2} = 35^2 = 1225$$

Como 1295 y 420 y 1225 son divisibles por 5, la terna:

$$x^2, b^2, a^2$$

no es primitiva, (todos sus términos son divisibles por 5) y por tanto, su estudio carece de interés, porque la demostración se ha realizado para las ternas primitivas.

Como resumen: Se cumple por tanto el supuesto a)

Si para valores enteros de a, no es posible encontrar valores enteros de x, y de b que satisfagan la ecuación (1)

Supuesto b).-

Si **b** es entero, demostraremos que no es posible encontrar valores enteros de **x**, y de **a** que cumplan la ecuación (1)

La ecuación (1), se expresa de la forma:

$$x^n - a^n = b^n \quad (I)$$

La resolución de la ecuación (I) para valores enteros, se puede realizar:

$$b^n = \delta^n \cdot \gamma^n$$

b=par (ternas primitivas)

δ, γ =enteros positivos ;

$$\delta > \gamma;$$

el único divisor común de δ, γ, es la unidad

Si δ =par$\longrightarrow$ γ=impar

Si δ =impar$\longrightarrow$ γ=par

Las ternas se pueden expresar de la siguiente forma:

$$x^{n/2} = \delta^{n}/4 + \gamma^{n} \quad (4)$$

$$a^{n/2} = \delta^{n}/4 - \gamma^{n} \quad (5)$$

$$b^{n/2} = \delta^{n/2}\,\gamma^{n/2}$$

ya que elevando al cuadrado cada término de la terna:

$$x^{n/2},\ a^{n/2},\ b^{n/2}$$

se cumple la ecuación (I)

$$(\delta^{n}/4 + \gamma^{n})^2 - (\delta^{n}/4 - \gamma^{n})^2 = \delta^{n}\,\gamma^{n}$$

Los valores de **δ** y **γ** se elegirán de la siguiente forma:

$$\delta = \text{par}$$

$$\delta^n/4 > \gamma^n$$

con ello se consigue que las expresiones:

$$\delta^n/4 + \gamma^n$$

$$\delta^n/4 - \gamma^n$$

generen valores enteros y positivos.*

*el criterio elegido:

$$\delta = \text{par}$$

$$\delta^n/4 > \gamma^n$$

es simplemente un criterio **sin incidencia en la demostración**, si se hubiese elegido el criterio

$$\delta = \text{impar},$$

$$\delta^n/4 > \gamma^n$$

cambiarían los valores de **x**, y de **a**, pero seguiría cumpliéndose la ecuación $x^n - a^n = b^n$

con valores de **x** y de **a** no enteros.

En el proceso de generación de ternas primitivas, se puede distinguir:

1.-Ternas donde:

$$\gamma = 1$$

resultando:

$$x^{n/2} = \delta^n/4 + 1$$

$$a^{n/2} = \delta^n/4 - 1$$

restando las ecuaciones anteriores:

$$x^{n/2} - a^{n/2} = 2$$

No existen valores enteros de **x** y de **a** que cumplan la ecuación anterior. La diferencia de cualquier par de valores **x,a** enteros elevados a la potencia **n/2**, es mayor de 2.

Asi:

$n=3,\ x=5,\ a=3 \longrightarrow 5^{3/2} - 3^{3/2} = 5.9841\ldots > 2$

Ej4: $b=14;\ n=6;\ \delta=14,\ \gamma=1$

valores de la terna (x^3, a^3, b^3)

$x^3 = 14^6/4 + 1 = 1882385;\ x = 123.4722848\ldots$(no entero)

$a^3 = 14^6/4 - 1 = 1882383;\ x = 123.472241\ldots$.(no entero)

$$x^6 - a^6 = 14^6$$

2.-Ternas donde:

$$\gamma = \text{impar con valor} > 1.$$

el mayor divisor común de **δ** y **γ** es la unidad

estas ternas se resuelven con las ecuaciones:

$$x^{n/2} = \delta^n/4 + \gamma^n$$

$$a^{n/2} = \delta^n/4 - \gamma^n$$

$$b^{n/2} = \delta^{n/2}\,\gamma^{n/2}$$

operando:

$$x^{n/2} = \gamma^n\,((\delta^n/4\,\gamma^n) + 1)$$

$$a^{n/2} = \gamma^n\,((\delta^n/4\,\gamma^n) - 1)$$

Como **δ, γ**, tienen como único denominador común la unidad, la evaluación de las expresiones:

$$(\delta^n /4\,\gamma^n)+1$$

$$(\delta^n /4\,\gamma^n) - 1$$

generan números racionales no enteros, y por tanto las expresiones:

$$[(\delta^n /4\,\gamma^n)+1]^{2/n}$$

$$[\,(\delta^n /4\,\gamma^n) -1]^{2/n}$$

generan números irracionales.

El carácter irracional de las expresiones anteriores no se elimina, multiplicando ambas por γ^2

$$\gamma^2[(\delta^n /4\,\gamma^n)+1]^{2/n}$$

$$\gamma^2\,[\,(\delta^n /4\,\gamma^n) -1]^{2/n}$$

Como:

$$x= \gamma^2\,((\delta^n /4\,\gamma^n)+1)^{2/n}$$

$$a= \gamma^2\,((\delta^n /4\,\gamma^n) - 1)^{\,2/n}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce, que no es posible encontrar valores enteros de **x** y de **a** que las cumplan.

Ej5.- b=12; δ=4; γ=3; n=5;

Las expresiones siguientes generan números racionales no enteros

$$(\delta^n /4\,\gamma^n)+1$$

$$(\delta^n /4\,\gamma^n) - 1$$

$$4^5/4\cdot 3^5+1=2.053497942....$$

$$4^5/4\cdot 3^5-1=0.053497942....$$

Las siguientes expresiones generan números irracionales

$$[(\delta^n /4\,\gamma^n)+1]^{2/5}=1.333514397...$$

$$[\,(\delta^n /4\,\gamma^n) -1]^{2/5}=0.309980826...$$

El producto de las mismas por γ^2, no elimina el carácter irracional

$$\gamma^2\ ((\delta^n/4\,\gamma^n)+1)^{2/5}\ = 12.00162957....$$

$$\gamma^2\ ((\delta^n/4\,\gamma^n)-1)^{2/5} = 2.789827436...$$

en consecuencia, los valores de x, a no son enteros

$$x= \gamma^2\ ((\delta^n/4\,\gamma^n)+1)^{2/5}\ = 12.00162957....$$

$$a= \gamma^2\ ((\delta^n/4\,\gamma^n)-1)^{2/5} = 2.789827436...$$

cumpliéndose

$$x^5-a^5=12^5$$

Nota: si se hubiese elegido $\delta=3$; $\gamma=4$; los resultados no influyen en la demostración,

Así;

$$x= \gamma^2\ ((\delta^n/4\,\gamma^n)+1)^{2/5}\ = 16.37313579....$$

$$a= \gamma^2\ ((\delta^n/4\,\gamma^n)-1)^{2/5} = 15.61333245...$$

ya que x,a no son enteros.

Cumpliéndose:

$$x^5-a^5=12^5$$

Se concluye que para valores de **b**=enteros, los valores de **x**, y **a** no son enteros

Se cumple por tanto el supuesto b)

Si para valores enteros de b, no es posible encontrar valores enteros de x, y de a que satisfagan la ecuación (1)

Quedando demostrado el T de Fermat.

3._El resto de ternas que se generan cuando:

$$b^n= \delta\cdot\gamma^*$$

donde **δ, γ** son divisores de b, distintos de la unidad, pero **δ** y **γ** tienen otros divisores comunes además de la unidad.

En estos casos las ternas que se obtienen no son primitivas

Se concluye que para valores de **b**=enteros, los valores de **x**, y **a** no son enteros

Ej6: b=12; n=3; $12^3=576 \cdot 3$

$$12^3=576 \cdot 3$$

$$\delta=576$$

$$\gamma=3$$

$$x^3=576^2/4+3^2=82953;$$

$$a^3=576^2/4-3^2=82935$$

Los elementos de la terna:

$$x^3,\ a^3, b^3$$

$$82953,\ 82935,\ 12^3$$

son divisibles por 3, lo que indica que la terna no es primitiva

Como resumen: se cumple por tanto el supuesto b)

Si para valores enteros de b, no es posible encontrar valores enteros de x, y de a que satisfagan la ecuación (1)

Quedando demostrado el T de Fermat.

*Los pares de valores **δ, γ** son:

(2,1) (3,2) (4,1) (4,3) (5,2) (5,4) (6,1) (~~6,3)~~ (6,5) (7,2) (7,4) (7,6)……

que ordenados de acuerdo con las condiciones:

$$\delta=\text{par}$$

$$\gamma \text{ impar}$$

los expresamos:

δ, γ =(2,1) ,(2,3) ,(4,3) ,(4,1) ,(4,5) ,(2,5) ,(6,5) ,~~(6,3)*~~ ,(6,1) ,(6,7) ,(4,7)……..

*~~(6,3)~~ Se elimina porque generaría una terna no primitiva

---

Nota: Para el **supuesto b),** se podía haber planteado la demostración de la misma forma que la realizada en el **supuesto a),**

partiendo de la ecuación :

$$x^n - a^n = b^n \quad (I)$$

Factorizando la ecuación (I), se obtiene:

$$(x^{n/2} + a^{n/2})\,(x^{n/2} - a^{n/2}) = \delta^n \cdot \gamma^n \qquad (2)$$

Igualando términos:

$$(x^{n/2} + a^{n/2}) = \delta^n$$

$$(x^{n/2} - a^{n/2}) = \gamma^n$$

operando:

$$x^{n/2} = \delta^n/(2) + \gamma^n/2$$

$$a^{n/2} = \delta^n/(2) - \gamma^n/2$$

y se hubiese llegado a los mismos resultados, ya que las expresiones:

$$x = \gamma^2\,((\delta^n/2\gamma^n) + 1/2)^{2/n}$$

$$a = \gamma^2\,((\delta^n/2\gamma^n) - 1/2)^{2/n}$$

generan valores irracionales para x y para a.

Se ha preferido realizar la demostración con las ecuaciones:

$$x^{n/2} = \delta^n/4 + \gamma^n$$

$$a^{n/2} = \delta^n/4 - \gamma^n$$

para evitar la división por 2 en ambos términos ($\delta^n/(2)$, $\gamma^n/2$) y con ello no utilizar la solución inmediata.

Los pares de valores para esta demostración: δ, γ:

$$\delta = \text{par} = 2,4,6,8,10\ldots\ldots$$

$$\gamma\ \text{impar} = 1,3,5,7,9,\ldots\ldots$$

los expresamos:

δ, γ =(2,1) ,(4,1) ,(4,3) ,(6,1) ~~,(6,3)~~ ,(6,5) ,(8,1) ,(8,3) ,(8,5) ,(8,7) ,(10,1)……..

~~(6,3)~~ Se elimina porque generaría una terna no primitiva

Ej. Si se utiliza este último procedimiento, si n=3; b=6; $b^3=216$;

$$\delta^3=3^3$$

$$\gamma^3=2^3$$

los términos de la terna ($x^{3/2}$, $a^{3/2}$) son:

$$x^{3/2}= \delta^3/(2)+\gamma^3/2=17.5$$

$$a^{3/2}= \delta^3/(2)-\gamma^3/2=9.5$$

resultando:

$$x=(17.5)^{2/3}=6.7404\ldots$$

$$a=(9.5)^{2/3}=4.485550$$

Se cumple que

$$x^3-a^3=b^3$$

$$(17.5)^2-(9.5)^2=216=6^3$$

Con b=6, tanto x, como a no son enteros.

Como para cualquier par δ, γ, los resultados de $x^{n/2}$ y de $a^{n/2}$ no son enteros, ya que son el resultado de un entero dividido por 2, se ha optado por evitar la división por 2 en los términos ($\delta^n/2$, $\gamma^n/2$), y generar valores enteros para $x^{n/2}$, y $a^{n/2}$

Supuesto c).-

Si **x** es entero, demostraremos que no es posible encontrar valores enteros de **b**, y de **a,** que cumplan la ecuación (1)

De acuerdo con los resultados de las hipótesis anteriores:

-supuesto a).- Si **a** es entero, entonces **x** y **b** no son enteros

-supuesto b).- Si **b** es entero, entonces **x** y **a** no son enteros

Se concluye que si **x** es entero, entonces **a** y **b** no son enteros

Quedando demostrado el T. de Fermat

El teorema se ha demostrado para valores $n\geq 2$, *pero es inmediata la demostración para valores n+1, por lo que se obvia la misma.*

B).- Demostración alternativa:

Basada en la expresión de las ternas pitagóricas en función de la suma, resta, o producto de determinados números r,p.

Si partimos de la ecuación (1)

$$x^n - b^n = a^n \quad (1)$$

$$n = \text{número entero positivo; } n > 2$$

en la que no es posible obtener ternas de números enteros positivos **x, a, b**, que la cumplan.

Las ternas pitagóricas de la ecuación anterior, $x^{n/2}$, $a^{n/2}$, $b^{n/2}$, son aquellos elementos que elevados al cuadrado satisfacen dicha ecuación:

$$x^n - a^n = b^n \quad (1)$$

$$(x^{n/2})^2 - (a^{n/2})^2 = (b^{n/2})^2$$

Expresión de las ternas pitagóricas de la ecuación anterior en función de pares de valores r,p

Las ternas pitagóricas ($x^{n/2}$, $a^{n/2}$, $b^{n/2}$), en función de r,p se pueden expresar:

$$x^{n/2} = r^2 + p^2$$

$$a^{n/2} = r^2 - p^2$$

$$b^{n/2} = 2rp$$

puesto que, elevando al cuadrado las expresiones anteriores se satisface la ecuación (1)

$$(r^2 + p^2)^2 - (r^2 - p^2)^2 = (2rp)^2$$

Demostraremos que no es posible encontrar pares de valores r,p que generen valores enteros de **x**, de **a**, y de **b**. conjuntamente. Con ello quedará demostrado el T. **Fermat**

Demostración

En el sistema de ecuaciones:

$$x^{n/2} = r^2 + p^2$$

$$a^{n/2} = r^2 - p^2$$

$$b^{n/2} = 2rp$$

se presentan tres posibilidades:

aa).-es posible encontrar valores de **r,p**, con n>2 que generan valores enteros de **a,** en la ecuación:

$$a^{n/2} = r^2 - p^2$$

pero esos valores de **r,p**, no generan valores enteros de **x** o de **b** en las otras dos ecuaciones.

bb).-es posible encontrar valores de **r,p**, con n>2 que generan valores enteros de **b,** en la ecuación:

$$b^{n/2} = 2rp$$

pero esos valores de **r,p** no generan valores enteros de **x** o de **a** en las otras dos ecuaciones.

cc).-es posible encontrar valores de **r,p,** con n>2 que generan valores enteros de **x,** en la ecuación:

$$x^{n/2} = r^2 + p^2$$

pero esos valores de **r,p** no generan valores enteros de **a** o de **b** en las otras dos ecuaciones.

Para la constatar la veracidad del teorema bastara con demostrar que se cumple cualquiera de las afirmaciones anteriores.

<u>Demostración para el supuesto aa).</u>

$$a=\text{entero positivo}$$

$$a^n=\alpha^n \cdot \beta^n$$

α, β=enteros positivos

$$\alpha>\beta$$

el mayor divisor común de α, β, es la unidad

en ternas primitivas a=impar y por tanto α=impar, β=impar

factorizando la ecuación:

$$r^2- p^2= a^{n/2}$$

$$(r+p)(r-p)= \alpha^{n/2} \cdot \beta^{n/2}$$

Igualando:

$$r+p= \alpha^{n/2}$$

$$r-p= \beta^{n/2}$$

Se obtiene:

$$r=(\alpha^{n/2} + \beta^{n/2})/2$$

$$p=(\alpha^{n/2} -\beta^{n/2})/2$$

Sustituyendo en:

$$x^{n/2}= r^2 + p^2$$

$$b^{n/2}=2rp$$

se obtiene:

$$x^{n/2}=(\alpha^n+\beta^n)/2 \quad (2)$$

$$b^{n/2}=(\alpha^n-\beta^n)/2 \quad (3)$$

que son las mismas ecuaciones que las obtenidas en el apartado **Demostración. Supuesto a)**, por lo que nos remitimos a lo señalado en dicho apartado.

1.- $a^n=a^n\cdot 1^n$; ternas con $\beta=1$;

2.- $a^n=\alpha^n\cdot\beta^n$; ternas con α, β ; $\beta\neq 1$;(el mayor divisor común de α, β, es la unidad)

3.- $a^n=c\cdot d$; ternas donde c,d tienen otros divisores comunes ademas de la unidad

Demostración para el supuesto bb).

Es posible encontrar en función de r,p, valores enteros de b, para cualquier n>2, en la ecuación

$$b^{n/2}=2rp$$

pero para los anteriores valores de r,p, no es posible encontrar valores enteros de **x**, **a**, en las ecuaciones:

$$x^{n/2}=r^2+p^2$$

$$a^{n/2}=r^2-p^2$$

Podemos expresar:

$$b^{n/2}=\delta^{n/2}\cdot\gamma^{n/2}$$

δ, γ =enteros positivos;

$$\delta>\gamma;$$

el mayor divisor común de δ, y γ, es la unidad

en ternas primitivas b=par y por tanto la paridad de δ es diferente a la de γ

Como $b^{n/2}=2rp$, se obtiene:

$$r\cdot p=(\delta^{n/2}\cdot\gamma^{n/2})/2$$

En el proceso de igualación de términos, los valores de r,p se elegirán para que se cumplan las condiciones:

$r>p$ (para que $a^{n/2}$, sea positivo)

La asignación de r,p, si $\delta^{n/2}/2>\gamma^{n/2}$, se puede expresar:

$$r=\delta^{n/2}/2^*$$

$$p=\gamma^{n/2}$$

la división por 2 se asignará al termino par .

En el caso que nos ocupa se ha supuesto que:

$$\delta^{n/2}=par$$

$$\delta^{n/2}/2>\gamma^{n/2}$$

Sustituyendo en las ecuaciones:

$$x^{n/2}=r^2+p^2$$

$$a^{n/2}=r^2-p^2$$

$$r>p$$

las ternas que se obtienen:

$$x^{n/2}=\delta^{n}/4+\gamma^{n}\quad(4)$$

$$a^{n/2}=\delta^{n}/4-\gamma^{n}\quad(5)$$

$$b^{n/2}=\delta^{n/2}\,\gamma^{n/2*}$$

que son las mismas ecuaciones que las obtenidas en el apartado **Demostración. Supuesto b)**, por lo que nos remitimos a lo señalado en dicho apartado.

1.- $b^n = b^n \cdot 1^n$; ternas con $\delta = 1$;

2.- $b^n = \delta^n \cdot \gamma^n$; ternas con δ, γ; $\gamma \neq 1$;(el mayor divisor común de, $\delta\gamma$, es la unidad)

3.- $b^n = \delta^n \cdot \gamma^n$; ternas donde δ, γ tienen otros divisores comunes además de la unidad

Se cumple por tanto el supuesto b)

Si para valores enteros de b, no es posible encontrar valores enteros de x, y de a que satisfagan la ecuación (1)

Quedando demostrado el T de Fermat.

*Los pares de valores δ, γ son:

(2,1) (3,2) (4,1) (4,3) (5,2) (5,4) (6,1) ~~(6,3)~~ (6,5) (7,2) (7,4) (7,6)……

que ordenados de acuerdo con las condiciones:

δ=par

γ impar

los expresamos:

δ, γ =(2,1) ,(2,3) ,(4,3) ,(4,1) ,(4,5) ,(2,5) ,(6,5) ,~~(6,3)*~~ ,(6,1) ,(6,7) ,(4,7)……..

~~(6,3)~~ Se elimina porque generaría una terna no primitiva

C.-Unas Ternas pitagóricas particulares.

Se trata de las ternas:

$$x^{n/2} = r^2 + p^2$$

$$a^{n/2} = r^2 - p^2$$

$$b^{n/2} = 2rp$$

cuando:

n=par

n≥2

transformándose en:

$$x^m = r^2 + p^{2*}$$

$$a^m = r^2 - p^2$$

$$b^m = 2rp$$

m=entero (2,3,4,5,6……)

m≥2

Estas ternas satisfacen la ecuación:

$$x^{2m} - b^{2m} = a^{2m} \quad (1)$$

con las siguientes características para el par de valores r,p

r>p

r,p= enteros positivos

r,p tienen como divisor común la unidad (condición para ternas primitivas)

r,p tienen paridad contraria

r,p=(2,1), (3,2), (4,3), (4,1), (5,2), (5,4), (6,1), (~~6,3~~), (6,5)…….

*en estas ternas con exponente m, también se incluyen aquellas $x^{n/2}$, $a^{n/2}$, $b^{n/2}$, (n>2) en las que x,a,b son cuadrados perfectos, ya que si:

$$x=x_1^2$$

$$a=a_1^2$$

$$b=b_1^2$$

resulta:

$$(x_1^2)^{n/2}=x_1^n$$

$$(a_1^2)^{n/2}=a_1^n$$

$$(b_1^2)^{n/2}=b_1^n$$

Y en consecuencia:

$$x_1^n= r^2 + p^2$$

$$a_1^n= r^2 - p^2$$

$$b_1^n=2rp$$

Demostraremos porque en las ternas pitagóricas:

$$x^m= r^2 + p^2$$

$$a^m= r^2 - p^2$$

$$b^m=2rp$$

que satisfacen la ecuación:

$$x^{2m}-a^{2m}=b^{2m}$$

solo uno de sus elementos, bien **x**, bien **a**, o bien **b** puede ser un cuadrado perfecto, un cubo perfecto o en definitiva un entero elevado a la enésima potencia.

Será necesario probar que es posible encontrar:

-pares de valores enteros(r,p) que generen valores enteros de **x,** en la ecuación:

$$x^m = r^2 + p^2$$

-pares de valores enteros(r,p) que generen valores enteros de **a,** en la ecuación:

$$a^m = r^2 - p^2$$

-pares de valores enteros(r,p) que generen valores enteros de **b**, en la ecuación:

$$b^m = 2rp$$

y a continuación probar que solo uno de los elementos de la terna, bien **x**, bien **a**, o bien **b** puede ser un entero elevado a la enésima potencia.

Como lo que se busca son valores enteros de **x,a,b**, dichos valores se pueden expresar de la forma siguiente:

$$x = s^2 + t^2$$

$$a = s^2 - t^2$$

$$b = 2st$$

s,t=enteros positivos

s>t

s,t solo tienen como divisor común la unidad

La paridad de s es contraria a la paridad de t

caso 1, encontraremos los valores de r,p, en función de s,p que generan valores enteros de x en la ecuación:

$$x^m = r^2 + p^2$$

Se utilizará el binomio de Newton para obtener los valores de r,p en función de s,t.

Con el binomio de Newton, cualquier entero (s+t) elevado a la potencia m, se puede *expresar:*

$$(s+t)^m = \binom{m}{0} s^m + \binom{m}{1} s^{m-1}t + \binom{m}{2} s^{m-2}t^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \binom{m}{m-1} st^{m-1} + \binom{m}{m} m$$

En la expresión anterior, denominando términos pares a los términos con coeficientes:

$$\binom{m}{0}, \binom{m}{2}, \binom{m}{4} \ldots\ldots\ldots$$

Denominando términos impares a los términos con coeficientes $\binom{m}{1}, \binom{m}{3}\binom{m}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots$

Podemos expresar:

$$r = \binom{m}{0} s^m - \binom{m}{2} s^{m-2}t^2 + \binom{m}{4} s^{m-4}\ t^4 - \binom{m}{6} s^{m-6}t^6 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p = \binom{m}{1} s^{m-1}\ t - \binom{m}{3} s^{m-3}t^3 + \binom{m}{5} s^{m-5}\ t^5 - \binom{m}{7} s^{m-7}t^7 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

r=términos impares del binomio de Newton con signos alternos (+ − + − + …)

p=términos pares del binomio de Newton con signos alternos (+ − + − +…)

Como:

$$x=s^2+t^2$$

sustituyendo r,p, x en la ecuación:

$$x^n= r^2 + p^2$$

se cumple

$$(s^2+t^2)^m=[\binom{m}{0} s^m - \binom{m}{2} s^{m-2}t^2+..]^2+ [\binom{m}{1} s^{m-1}\ t^1- \binom{m}{3} s^{m-3}t^3..]^2$$

Por tanto, para cualquier valor de s,t, con:

s,t enteros positivos,

s>t,

s,t solo tienen como divisor común la unidad,

La paridad de s es contraria a la paridad de t

se afirma, que **x** elevado a la enésima potencia se puede expresar como la suma de dos cuadrados perfectos.

$$x^m= r^2 + p^2$$

$$x=s^2+t^2*$$

Los pares **s,t**, toman los valores:

s,t=(2,1) (3,2) (4,1) (4,3) (5,2) (5,4) (6,1) (~~6,3~~) (6,5) (7,2) (7,4) (7,6)……

Para una mejor comprensión, se expresarán en los ejemplos siguientes, las fórmulas para valores de m:

$$m=2,3,4,5.....$$

Para m=2;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^2=s^2+2st+t^2$$

$$r= s^2-t^2$$

$$p=2st$$

$$x=s^2+t^2$$

se comprueba que: $(s^2+t^2)^2=(s^2-t^2)^2+(2st)^2$

Para m=3;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^3=s^3+3s^2t+3st^2+t^3$$

$$r= s^3-3st^2$$

$$p=3s^2t- t^3$$

$$x=s^2+t^2$$

se comprueba:

$$(s^2+t^2)^3=(s^3-3st^2)^2+(3s^2t- t^3)^2$$

Para m=4;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^4=s^4+4s^3t+6s^2\ t^2+4st^3+t^4$$

$$r= s^4-6s^2\ t^2+ t^4$$

$$p=4s^3t -4st^3$$

$$x=s^2+t^2$$

se comprueba:

$$(s^2+t^2)^4=(s^4-6s^2\ t^2+ t^4)^2+(4s^3t -4st^3)^2$$

Para m=5;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^5=s^5+5s^4t+10s^3\ t^2+10s^2\ t^3+5st^4+ t^5$$

$$r= s^5-10s^3\ t^2+5st^4$$

$$p=5s^4t -10s^2\ t^3+t^5$$

$$x=s^2+t^2$$

se comprueba:

$$(s^2+t^2)^5=(s^5-10s^3\ t^2+5st^4)^2+(5s^4t -10s^2\ t^4+t^5)^2$$

……

……

Ej.

$m=5$

$s=7$

$t=6$

$x=s^2+t^2$

$x=49+36=85;$

$x^5= r^2 + p^2$

$x^5 =4437053125$

$r= s^5-10s^3\, t^2+5st^4$

$r=16807-123480+45360=-61313$ (términos impares del binomio de Newton con signos alternos $+ - + - + - \cdots\cdots$)

$p=5s^4t -10s^2\, t^3+t^5$ (términos pares del binomio de Newton con signos alternos $+ - + - + - \cdots\cdots$)

$p=72030- 105840+7776=-26034$

El signo $(-)$ se puede evitar, tomando los valores absolutos de r y p, asignando para r el valor absoluto mayor (61313) y asignando para p el valor absoluto menor (26034), con ello, el valor de los términos de la terna;

$$a^m= r^2- p^2$$

$$b^m=2rp$$

se corresponden con enteros positivos.

Se comprueba que:

$x^5 =4437053125=(61313)^2+(26034)^2$

caso 2, encontraremos los valores de r,p, en función de s,p que cumplen:

$$a^m= r^2 -p^2$$

Se utilizará el binomio de Newton para obtener los valores de r,p en función de s,t.

Con el binomio de Newton, cualquier impar entero (s+t) elevado a la potencia m, se puede *expresar:*

$$(s+t)^m = \binom{m}{0} m + \binom{m}{1} s^{m-1}t + \binom{m}{2} s^{m-2}t^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots \binom{m}{m-1} st^{m-1} + \binom{m}{m} t^m$$

En la expresión anterior, denominando términos pares a los términos con coeficientes:

$$\binom{m}{0}, \binom{m}{2}, \binom{m}{4} \ldots\ldots\ldots$$

Denominando términos impares a los términos con coeficientes $\binom{m}{1}, \binom{m}{3} \binom{m}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots$

Podemos expresar:

$$r = \binom{m}{0} s^m + \binom{m}{2} s^{m-2}t^2 + \binom{m}{4} s^{m-4} + \binom{m}{6} s^{m-6}t^6 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p = \binom{m}{1} s^{m-1}\ t^1 + \binom{m}{3} s^{m-3}t^3 + \binom{m}{5} s^{m-5}\ t^5 + \binom{m}{7} s^{m-7}t^7 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

r=términos impares del binomio de Newton

p= términos pares del binomio de Newton

Como:

$$a = s^2 - t^2$$

sustituyendo r,p, x en la ecuación:

$$a^m = r^2 - p^2$$

se cumple

$$(s^2-t^2)^m = \left[\binom{m}{0} s^m + \binom{m}{2} s^{m-2}t^2 + \ldots\right]^2 - \left[\binom{m}{1} s^{m-1}\ t^1 + \binom{m}{3} s^{m-3}\ \ t^3 \ldots.\right]^2$$

Por tanto, para cualquier valor de s,t, con:

s,t enteros positivos,

s>t,

s,t solo tienen como divisor común la unidad,

La paridad de s es contraria a la paridad de t

Todo entero **a** elevado a la enésima potencia se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos.

$$a^m = r^2 - p^2$$

Los pares **s,t**, toman los valores:

s,t=(2,1) (3,2) (4,1) (4,3) (5,2) (5,4) (6,1) ~~(6,3)~~ (6,5) (7,2) (7,4) (7,6)……

y para $m \geq 1$, la ecuación (1), se transforma en:

$$x^{2m} - b^{2m} = a^{2m} \quad (1)$$

Para una mejor comprensión, se expresarán las fórmulas para valores de m:

$$m=2,3,4,5$$

Para m=2;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^2 = s^2 + 2st + t^2$$

$$r = s^2 + t^2$$

$$p = 2st$$

$$a = s^2 - t^2$$

se comprueba:

$$(s^2 - t^2)^2 = (s^2 + t^2)^2 - (2st)^2$$

Para m=3;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^3=s^3+3s^2t+3st^2+t^3$$

$$r= s^3+3st^2$$

$$p=3s^2t+ t^3$$

$$a=s^2-t^2$$

se comprueba:

$$(s^2-t^2)^3=(s^3+3st^2)^2- (3s^2t+ t^3)^2$$

Para m=4;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^4=s^4+4s^3t+6s^2 t^2+4st^3+t^4$$

$$r= s^4+6s^2 t^2+ t^4$$

$$p=4s^3t +4st^3$$

se comprueba:

$$(s^2-t^2)^4=(s^4+6s^2 t^2+ t^4)^2- (4s^3t +4st^3)^2$$

Para m=5;

Utilizamos el binomio de Newton para determinar r,p en función de s,t

$$(s+t)^5=s^5+5s^4t+10s^3 t^2+10s^2 t^3+5st^4+ t^5$$

$$r= s^5+10s^3 t^2+5st^4$$

$$p=5s^4t +10s^2 t^3+t^5$$

$$a=s^2-t^2$$

se comprueba:

$$(s^2-t^2)^5=(s^5+10s^3 t^2+5st^4)^2- (5s^4t +10s^2 t^4+t^5)^2$$

……

……

Ej.

$m=4$

$s=5$

$t=4$

$a=s^2-t^2$

$a=25-16=9;$

$a^4=6561$

$r= s^4+6s^2\,t^2+ t^4$ (términos impares del binomio de Newton, con signo positivo)

$r=3281$

$p=4s^3t+4st^3$ (términos pares de binomio de Newton, con signo positivo)

$p=3280$

Se comprueba que:

$a^4= r^2 - p^2$

$a^4= 6561=(3281)^2-(3280)^2$

En el caso que nos ocupa (a=entero), los valores numéricos de r,p se pueden obtener directamente aplicando la formula resultante de la factorización de la ecuación principal:

$$r=(a^4+1)/2=(9^4+1)/2=3281$$

$$p=(a^4+1)/2=(9^4-1)/2=3280$$

caso 3, encontraremos los valores de r,p, en función de s,p que cumplen:

$$b^m=2rp$$

En este caso la obtención de los valores de r y de p en función de s,t es inmediata:

$$b=2st$$

$$b^m=s^mt^m=2rp$$

$$r= s^m/2$$

$$p=t^m$$

En la generación de ternas primitivas:

$$s=par$$

$$t=impar$$

s=2, 4, 6, 8, …….

t=1,3, 5, 7,…….

Demostrado que es posible encontrar valores de r,p que generan valores enteros de **x**, de **a** o de **b** en la resolución de las ternas:

$$x^m = r^2 + p^2$$

$$a^m = r^2 - p^2$$

$$b^m = 2rp$$

que satisfacen la ecuación

$$x^{2m} - b^{2m} = a^{2m} \quad (1);$$

$$m \geq 2$$

Queda por demostrar si es posible encontrar pares de valores r,p que generen valores enteros de x, a, b,

Si lo anterior **no es posible** se habrá demostrado el teorema de Fermat para los casos donde las ternas se expresan de la forma x^m ,a^m, b^m, y la ecuación fundamental $x^{2m}-b^{2m}=a^{2m}$; $m\geq 2$

Así a los pares de valores r,p, que generan valores enteros de x en la ecuación $x^m= r^2 + p^2$ les llamaremos (r_x, p_x).

$$r_x=\binom{m}{0}s^m-\binom{m}{2}s^{m-2}t^2+\binom{m}{4}s^{m-4}\ t^4-\ \binom{m}{6}s^{m-6}t^6\ldots\ldots\ldots$$

$$p_x=\binom{m}{1}s^{m-1}\ t^1-\binom{m}{3}s^{m-3}t^3+\binom{m}{5}s^{m-5}\ t^5-\ \binom{m}{7}s^{m-7}t^7\ldots\ldots\ldots$$

A los pares de valores r,p, que generan valores enteros de a en la ecuación $a^m =r^2- p^2$ les llamaremos (r_a, p_a).

$$r_a=\binom{m}{0}s^m\ +\ \binom{m}{2}s^{m-2}t^2+\binom{m}{4}s^{m-4}t^4+\ \binom{m}{6}s^{m-6}t^6\ldots\ldots\ldots$$

$$p_a=\binom{m}{1}s^{m-1}\ t^1+\binom{m}{3}s^{m-3}t^3+\binom{m}{5}s^{m-5}\ t^5+\ \binom{m}{7}s^{m-7}t^7\ldots\ldots\ldots$$

A los pares de valores r,p, que generan valores enteros de b, en la ecuación $b^m =2rp$ les llamaremos (r_b, p_b).

$$r_b= s^m/2$$

$$p_b=t^m$$

Si para cualquier par de valores s,t, los pares:

$$r_x, p_x \neq r_a, p_a$$

$$r_x\, p_x \neq r_b\, p_b$$

$$r_a\, p_a \neq r_b\, p_b$$

se habrá demostrado que se cumple el teorema de Fermat para los casos donde las ternas se expresan de la forma x^m ,a^m, b^m, y la ecuación fundamental $x^{2m}-b^{2m}=a^{2m}$

En la comparación de los pares de valores, bastará con que un elemento del primer par no sea igual al mismo elemento del segundo par:

Se comprueba que efectivamente se cumple:

$$r_x \neq r_a$$

$$\binom{m}{0}s^m - \binom{m}{2}s^{m-2}t^2+\binom{m}{4}s^{m-4}t^4 \ldots . \neq \binom{m}{0}s^m + \binom{m}{2}s^{m-2}t^2+\binom{m}{4}s^{m-4}t^4 +$$

$$p_x \neq p_a \ *$$

$$\binom{m}{1}s^m - \binom{m}{3}s^{m-3}t^3+\binom{m}{5}s^{m-5}\ t^5 \ \ldots \neq \binom{m}{1}s^m + \binom{m}{3}s^{m-3}t^3+\binom{m}{5}s^{m-5}\ t^5$$

$$r_x \neq r_b$$

$$\binom{m}{0}s^m - \binom{m}{2}s^{m-2}t^2+\binom{m}{4}s^{m-4}\ t^4 \ldots\ldots\ldots \neq s^m/2$$

$$p_x \neq p_b$$

$$\binom{m}{1}s^m - \binom{m}{3}s^{m-3}t^3+\binom{m}{5}s^{m-5}\ t^5 \ldots \ldots \neq t^m$$

$$r_a \neq r_{b^*}$$

$$\binom{m}{0}s^m + \binom{m}{2}s^{m-2}t^2+\binom{m}{4}s^{m-4}t^4 \ldots\ldots\ldots \neq s^m/2$$

$$p_a \neq p_b$$

$$\binom{m}{1}s^m + \binom{m}{3}s^{m-3}t^3+\binom{m}{5}s^{m-5}t^5 .. \neq t^m$$

***Cuando m=2, se presenta el único caso donde $p_x = p_a$, pero como $r_x \neq r_a$, no influye la demostración.**

*Todas las desigualdades anteriores son sencillas de comprobar, pero en algunas su comprobación es inmediata:

Es el caso:

$$r_a \neq r_b$$

$$s^m + \binom{m}{2} s^{m-2}t^2 + \binom{m}{4} s^{m-4}t^4 \ldots\ldots\ldots\ldots \neq s^m/2$$

$$s^m + 2[\binom{m}{2} s^{m-2}t^2 + \binom{m}{4} s^{m-4}t^4 \ldots\ldots] = 0$$

Para valores s,t enteros positivos, la igualdad anterior no es posible.

$$p_a \neq p_b$$

$$\binom{m}{1} s^m + \binom{m}{3} s^{m-3}t^3 + \binom{m}{5} s^{m-5}t^5 \ldots\ldots + t^m \neq t^m$$

$$\binom{m}{1} s^m + \binom{m}{3} s^{m-3}t^3 + \binom{m}{5} s^{m-5}t^5 \ldots = 0$$

Para valores s,t enteros positivos, la igualdad anterior no es posible.

Por tanto: solo con la comprobación anterior, donde los pares de valores r,p que generan valores enteros de a, no generan valores enteros de b, es suficiente para afirmar que el T.F se cumple en la ecuación

$$x^{2m} - b^{2m} = a^{2m} \quad (1);$$

*A continuación, a modo de ejemplo,se desarrollará lo anterior comparando los valores de **x** con los valores de **a**, y de **b** para el supuesto de m=2, pero es extensible a cualquier otro valor **m≥2***

Si x=entero, a y b no son enteros, m=2;

-Comparando los valores de x, con los valores de a

1.-valores de x

$x^2 = r^2 + p^2$

$r_x = s^2 - t^2$ (llamamos r_x a los valores de r que generan valores enteros de x)

$p_x = 2st$ (llamamos p_x a los valores de p que generan valores enteros de x)

……..

2.- valores de a

$a^2=r^2-p^2$

$r_a= s^2+t^2$(llamamos r_a a los valores de r que generan valores enteros de a)

$p_a=2st$ (llamamos p_a a los valores de p que generan valores enteros de a)

Así, los pares de valores r,p que generan valores enteros de x (r_x, p_x) deben de ser iguales a los pares de valores r,p que generan valores enteros de (r_a, p_a)

Aun cuando en este caso (n=2), $p_x= p_a$, como para cualquier par de valores s,t,

$r_x \neq r_a$

$s^2-t^2 \neq s^2+t^2$

se deduce que los valores r,p que generan valores enteros de x, no generan valores enteros de a, para n=2

$p_x= p_a$

2st=2st*

*es el único caso donde $p_x= p_a$, pero como $r_x \neq r_{a,,}$ cuando a es entero, x no es entero

Ej. s=5, t=2; $r_a=29$, $p_a=20$; $a^2=29^2-20^2=21^2$; $x^2=29^2+20^2=1241$; x=35.2278

Los valores r,p que generan valores enteros de a no generan valores enteros de x

……..

<u>Comparando con los valores de x con los valores de b</u>

m=2;

1.-valores de x

$x^2=r^2 + p^2$

$r_x= s^2-t^2$ (llamamos r_x a los valores de r que generan valores enteros de x)

$p_x=2st$ (llamamos p_x a los valores de p que generan valores enteros de x)

……..

2.-valores de b

$b^2=2rp$

$r_b= s^2/2$ (llamamos r_b a los valores de r que generan valores enteros de b)

$p_b=t^2$(llamamos p_b a los valores de p que generan valores enteros de b)

Puesto que para cualquier par de valores s,t,

$r_x \neq r_b$

$s^2-t^2 \neq s^2/2$

$p_x \neq p_b$

$2st \neq t^2$

se deduce que para m=2, los valores r,p que generan valores enteros de x, no generan valores enteros de b

Como resumen: Para m=2, los pares de valores r,p que generan valores enteros de x, no generan valores enteros de a y de b, por lo que no es posible encontrar valores enteros de x,a,b que cumplan la ecuación:

$$x^{2m}-b^{2m}=a^{2m} \quad (1)$$

*A continuación, a modo de ejemplo, se desarrollará lo anterior comparando los valores de **a** con los valores de **x**, y de **b** para el supuesto de m=3, pero es extensible a cualquier otro valor **m≥2***

Si a=entero, x y b no son enteros ; m=3;

-Comparando los valores de a, con los valores de x

m=3;

$a^3=r^2-p^2$

$r_a= s^3+3st^2$ (llamamos r_x a los valores de r que generan valores enteros de x)

$p_a=3s^2t+ t^3$(llamamos p_x a los valores de p que generan valores enteros de x)

……..

$x^3=r^2+p^2$

$r_x= s^3-3st^2$ (llamamos r_x a los valores de r que generan valores enteros de x)

$p_x=3s^2t- t^3$(llamamos p_x a los valores de p que generan valores enteros de x)

Así, los pares de valores r,p que generan valores enteros de a (r_a, p_a) deben de ser iguales a los pares de valores r,p que generan valores enteros de x (r_x, p_x)

$r_a \neq r_x$

$s^3+3st^2 \neq s^3-3st^2$

$p_a \neq p_x$

$3s^2t+ t^3 \neq 3s^2t- t^3$

se deduce que los valores r,p que generan valores enteros de a, no generan valores enteros de x, para m=3

Comparando los valores de a con los valores de b

m=3;

$a^2=r^2 -p^2$

$r_a= s^3+3st^2$ (llamamos r_a a los valores de r que generan valores enteros de a)

$p_a=3s^2t+ t^3$ (llamamos p_{xa}a los valores de p que generan valores enteros de a)

……..

$b^2=2rp$

$r_b= s^3/2$ (llamamos r_b a los valores de r que generan valores enteros de b)

$p_b=t^3$(llamamos p_b a los valores de p que generan valores enteros de b)

Puesto que para cualquier par de valores s,t,

$r_a \neq r_b$

$s^3+3st^2 \neq s^3/2$

$p_a \neq p_b$

$3s^2t+ t^3 \neq t^3$

se deduce que los valores r,p que generan valores enteros de a, no generan valores enteros de b, para m=3

Como resumen: Para m=3, los pares de valores r,p que generan valores enteros de a, no generan valores enteros de x, y de b, por lo que no es posible encontrar valores enteros de x,a,b que cumplan la ecuación:

$$x^{2m}-b^{2m}=a^{2m} \quad (1)$$

*A continuación, a modo de ejemplo, se desarrollará lo anterior comparando los valores de **b** con los valores de **x**, y de **a** para el supuesto de m=5, pero es extensible a cualquier otro valor **m≥2***

Si b=entero, x y a no son enteros; m=5;

-Comparando los valores de b, con los valores de x

m=5;

$r_b= s^5/2$ (llamamos r_b a los valores de r que generan valores enteros de b)

$p_b=t^5$(llamamos p_b a los valores de p que generan valores enteros de b)

$x^5=r^2-p^2$

$r_x= s^5-10s^3 t^2+5st^4$

(llamamos r_x a los valores de r que generan valores enteros de x)

$p_a=5s^4t -10s^2 t^3+t^5$

(llamamos p_x a los valores de p que generan valores enteros de x)

Así, los pares de valores r,p que generan valores enteros de b (r_b, p_b) deben de ser iguales a los pares de valores r,p que generan valores enteros de x (r_x, p_x)

$r_b \neq r_x$

$s^5/2 \neq s^5-10s^3 t^2+5st^4$

$p_b \neq p_x$

$t^5 \neq 5s^4t -10s^2 t^3+t^{5*}$

se deduce que los valores r,p que generan valores enteros de b, no generan valores enteros de x, para m=5

<u>-Comparando los valores de b, con los valores de a</u>

n=5;

$r_b= s^5/2$ (llamamos r_b a los valores de r que generan valores enteros de b)

$p_b=t^5$(llamamos p_b a los valores de p que generan valores enteros de b)

$a^5=r^2-p^2$

$r_a=s^5+10s^3 t^2+5st^4$

(llamamos r_a a los valores de r que generan valores enteros de x)

$p_a=5s^4t +10s^2 t^3+t^5$

(llamamos p_x a los valores de p que generan valores enteros de x)

Así, los pares de valores r,p que generan valores enteros de b (r_b, p_b) deben de ser iguales a los pares de valores r,p que generan valores enteros de a (r_a, p_a)

$r_b \neq r_a$

$s^5/2 \neq s^5+10s^3 t^2+5st^4$

$p_b \neq p_a$

$t^5 \neq 5s^4t +10s^2 t^3+t^5$

se deduce que los valores r,p que generan valores enteros de b, no generan valores enteros de a, para m=5

Como resumen: Para m=5, los pares de valores r,p que generan valores enteros de b, no generan valores enteros de x y de a, por lo que no es posible encontrar valores enteros de x,a,b que cumplan la ecuación:

$$x^{2m}-b^{2m}=a^{2m} \quad (1)$$

Para cualquier n≥2, se afirma que en las ternas:

$$x^m = r^2 + p^2$$

$$x^m = r^2 - p^2$$

$$b^m = 2rp$$

- es posible encontrar pares de valores r_x,p_x que generan valores enteros de x en la expresión:

$$x^m = r^2 + p^2$$

pero estos pares de valores r,p, no generan valores enteros de a y de b en las expresiones:

$$a^m = r^2 - p^2$$

$$b^m = 2rp$$

- es posible encontrar pares de valores r_a,p_a que generan valores enteros de a en la expresión:

$$a^m = r^2 - p^2$$

pero estos pares de valores r,p, no generan valores enteros de x y de b en las expresiones:

$$x^m = r^2 + p^2$$

$$b^m = 2rp$$

- es posible encontrar pares de valores r_b,p_b que generan valores enteros de b en la expresión:

$$b^m=2rp$$

pero estos pares de valores r,p, no generan valores enteros de x y de a en las expresiones:

$$x^m=r^2+p^2$$

$$a^m=r^2-p^2$$

Lo anterior supone la demostración del cumplimiento del teorema de Fermat, para ternas:

$$x^m=r^2+p^2$$

$$a^m=r^2-p^2$$

$$b^m=2rp$$

$$m\geq 2$$

$$r,p = \text{enteros positivos}$$

$$r>p$$

con la ecuación fundamental del teorema para valores $m\geq 2$

$m=2,3,4,5,6\ldots\ldots$

$$x^{2m}-a^{2m}=b^{2m}$$

D.-Ternas pitagóricas con m=1; Repetición de uno de sus elementos

Las ternas x^m, a^m, b^m

cuando m=1, se transforman en:

$$x= r^2 + p^2$$

$$a= r^2 - p^2$$

$$b=2rp$$

$$r>p$$

r,p= enteros positivos

r,p tienen como único divisor común la unidad (condición para ternas primitivas)

r,p tienen paridad contraria

r,p=(2,1), (3,2), (4,3), (4,1), (5,2), (5,4), (6,1), (~~6,3~~), (6,5).....

Estas ternas:

$$x, a, b,$$

satisfacen la ecuación:

$$x^2 - a^2=b^2$$

y en ellas se presentan dos posibilidades:

1)-Ternas en las que **x,a,b son enteros**, pero ninguno de ellos es un cuadrado perfecto, un cubo perfecto, en definitiva, un entero elevado a la enésima potencia.

Es el caso de ternas como:

13,5,12

29,21,20

37,35,12

41,40,20

.....

2)-Ternas en las que **solo x, solo a, o solo b** es un cuadrado perfecto, un cubo perfecto, en definitiva, un entero elevado a la enésima potencia.

Es el caso de ternas como:

5,3,4 $(b^2=4)$

17,15,8 $(b^3=8)$

25,24,7 $(x^2=25)$

313,25,312 $(a^2=25)$

125,117,144 $(x^3=125)$

58825,343,58824 $(a^3=343)$

371293,341525,145688 $(x^5=371293)$

……

……

Obviamente si existiesen ternas x,a,b , donde los tres valores fueran cuadrados perfectos, cubos perfectos, …….enteros elevados a la enésima potencia, Fermat no hubiese podido enunciar su famoso teorema.

<u>Repetición elementos</u>:

En relación con posibles repeticiones de elementos, estas ternas se caracterizan porque bien **x**, bien **a**, bien **b**, pueden repetirse pero no existen dos ternas que tengan **dos** de sus elementos repetidos. *

*ej: ternas con valor **x** repetido:

65,63,16

65,33,56

en ellas aparece repetido el valor **x**=**65**, pero en ambas no se repiten los valores de **a** y de **b**

En estas ternas el valor **x** puede aparecer repetido una o mas veces, sin que se repitan los valores de **a** o de **b**.

*ej de ternas con valor **a** repetido:

113,**15**,112

17,**15**,8

en ellas aparece repetido el valor **a=15**, pero en ambas no se repiten los valores de **x** y de **b**

En estas ternas el valor **a** puede aparecer repetido una o mas veces, sin que se repitan los valores de **x** o de **b**.

*ej de ternas con valor b repetido:

37,35,**12**

13,5,**12**

en ellas aparece repetido el valor **b=12**, pero en ambas no se repiten los valores de x y de a

En estas ternas el valor **b** puede aparecer repetido una o mas veces, sin que se repitan los valores de **x** o de **a**.

En función de los elementos a repetir se distingue:

a).- *Ternas primitivas con x repetido (x=impar)*

Para ello se toman dos pares de valores r,p que llamaremos:

r_1,p_1

r_2,p_2

calcularemos los valores r,p de la terna con x repetida que denominamos.

r_{31},p_{31*}

r_{32},p_{32*}

de la siguiente forma:

- primera terna($r_{31,}p_{31}$)

$$r_{31}=(r_1 r_2+ p_1 p_2)$$

$$p_{31}=(r_1 p_2- p_1 r_2)$$

$$x= r_{31}^2+ p_{31}^2$$

$$r_{31}^2= (r_1^2 r_2^2+ p_1^2 p_2^2+2 r_{1,}p_1 r_2 p_2)$$

$$p_{31}^2=(r_1^2 p_2^2+ p_1^2 r_2^2-2 r_{1,}p_1 r_2 p_2)$$

$$x= r_{31}^2+ p_{31}^2$$

$$a_1= r_{31}^2-p_{31}^2$$

$$b_1=2 r_{31} p_{31}$$

.....

- segunda terna($r_{32,}p_{32}$)

$$r_{32}=(r_1 r_2-p_1 p_2)$$

$$p_{32}=(r_1 p_2 + p_1 r_2)$$

$$r_{32}= (r_1^2 r_2^2+ p_1^2 p_2^2 -2 r_{1,}p_1 r_2 p_2)$$

$$p_{32}^2=(r_1^2 p_2^2+ p_1^2 r_2^2+2 r_{1,}p_1 r_2 p_2)$$

$$x= r_{32}^2+ p_{32}^2$$

$$a_2= r_{32}^2-p_{32}^2$$

$$b_2=2 r_{32} p_{32}$$

Se generan dos ternas con un único valor de x, ya que:

$$r_{31}^2+ p_{31}^2= x= r_{32}^2+ p_{32}^2,$$

pero con valores $a_1, a_2, b_1, b_2,$ diferentes, ya que:

$$r_{31}^2 - p_{31}^2 \neq r_{32}^2 - p_{32}^2$$

$$2\, r_{31}\, p_{31} \neq 2\, r_{32}\, p_{32}$$

$$a_1 \neq b_1$$

$$a_1 \neq b_2$$

$$a_2 \neq b_1$$

$$a_2 \neq b_2$$

***r,p**=(2,1) (3,2) (4,1) (4,3) (5,2) (5,4) (6,1) (~~6,3~~) (6,5) (7,2) (7,4) (7,6).....

Así, existe mas de una terna con el mismo valor de x, pero en estas ternas los distintos valores de a y de b no se repiten en ninguna de ellas.

ej. si elegimos:

$$(r_1, p_1) = (4,1)$$

$$(r_2, p_2) = (2,1)$$

$$r_{31} = 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 9$$

$$p_{31} = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 2$$

$$x = r_{31}^2 + p_{31}^2 = \mathbf{85}$$

$$a_1 = r_{31}^2 - p_{31}^2 = 77$$

$$b_1 = 2\, r_{31}\, p_{31} = 36$$

$$(\mathbf{85}, 77, 36)$$

$$r_{32} = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 7$$

$$p_{32} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 6$$

$$x = r_{32}^2 + p_{32}^2 = \mathbf{85}$$

$$a_2 = r_{32}^2 - p_{32}^2 = 13$$

$$b_2 = 2\, r_{32}\, p_{32} = 84$$

$$(\mathbf{85}, 13, 84)$$

comprobamos que las dos ternas tienen en común x=85, pero a_1 a_2 b_1 b_2 son diferentes. De igual forma se pueden obtener ternas con mas de una repetición del

valor de x utilizando el mismo procedimiento, pero eligiendo mas pares de valores r,p , por ejemplo, los elegidos anteriormente (2,1) (3,2) mas (5,4) y formando:

$(r_{31}, p_{31})(5,4)$; Se generan dos ternas con un único valor de x

$(r_{32}, p_{32})(5,4)$ Se generan dos ternas con un único valor de x

Para el caso anterior, las ternas obtenidas son:

3845,2133,2756

3845,747,3404

3845,3477,3404

3845,3243,1276

b).- *Ternas primitivas con el valor de **a** repetido (**a**=impar)*

Todo impar **a** se puede expresar como el producto de dos impares.

Si a es primo:

$$a=a\cdot 1$$

Si a no es primo:

$$a=c\cdot d$$

(c,d=impares)

En el primer caso, (a=primo) el par de valores r,p que generan **a**, de acuerdo a la ecuación:

$$a= r^2- p^2$$

son:

$$r_4=(a+1)/2$$

$$p_4=(a-1)/2$$

de tal forma que si **a**=primo, de las infinitas ternas pitagóricas que se pueden formar, solo existirá una de ellas con el término **a.**

En el segundo caso, (**a≠primo, a=cd**) los pares de valores r,p, que generan **a**, de acuerdo a la ecuación

$$a= r^2- p^2$$

son:

$$r_{51}=(a+1)/2$$

$$p_{51}=(a-1)/2$$

$$r_{52}=(c+d)/2$$

$$p_{52}=(c-d)/2$$

generándose dos ternas con el mismo valor de **a**

$$x_1= r_{51}^2+ p_{51}^2$$

$$a= r_{51}^2-p_{51}^2$$

$$b_1=2\ r_{51}\ p_{51}$$

$$x_2= r_{52}^2+ p_{52}^2$$

$$a= r_{52}^2-p_{52}^2$$

$$b_2=2\ r_{52}\ p_{52}$$

Se generan dos ternas con un único valor de a, ya que:

$$r_{51}^2+ p_{51}^2= a= r_{52}^2+ p_{52}^2,$$

pero con valores $x_1, x_2, b_1, b_2,$ diferentes, ya que:

$$r_{51}^2-p_{51}^2\neq r_{52}^2-p_{52}^2$$

$$2\ r_{51}\ p_{51}\neq 2\ r_{52}\ p_{52}$$

$$x_1 \neq b_1$$

$$x_1 \neq b_2$$

$$x_2 \neq b_1$$

$$x_2 \neq b_2$$

Así, existen dos o mas ternas con el valor a repetido, si a≠es primo.

Existe más de una terna con el mismo valor de a, pero en estas ternas los distintos valores de x y de b no se repiten en ninguna de ellas.

ej. si elegimos:

a=15;

a=15·1

a=5·3

$$r_{51}=(15+1)/2=8$$

$$p_{51}=(15-1)/2=7$$

$$\mathbf{r_{51},p_{51}=(8,7)}$$

$$r_{52}=(5+3)/2=4$$

$$p_{52}=(5-3)/2=1$$

$$\mathbf{r_{52},p_{52}=(4,1)}$$

$$x_1= r_{51}^2+ p_{51}^2=113$$

$$a= r_{51}^2 - p_{51}^2=\mathbf{15}$$

$$b_1=2\, r_{51}\, p_{51}=112$$

$$(113,\mathbf{15},112)$$

$$x_2= r_{52}^2+ p_{52}^2=17$$

$$a= r_{52}^2 - p_{52}^2=\mathbf{15}$$

$$b_2=2\, r_{52}\, p_{52}=8$$

$$(17,\mathbf{15},8)$$

comprobamos que las dos ternas tienen en común a=15, pero x_1 x_2 b_1 b_2 son diferentes. De igual forma se pueden obtener ternas con mas de una repetición del valor de a utilizando el mismo procedimiento.

Ej. $a=3\cdot5\cdot7=105$

Se consideran los productos:

$$105\cdot1$$

$$35\cdot3$$

$$21\cdot5$$

$$15\cdot7$$

Obteniéndose cuatro ternas con a=105

5513,**105**,5512

617,**105**,608

233,**105**,208

137,**105**,88

*c).- Ternas primitivas con el valor de **b** repetido (**b**=par)*

$$b=2rp$$

La formación de las ternas a partir del término b, se realiza de la siguiente forma:

$$r>p$$

el mayor divisor común de r,p es la unidad.

Pudiendo ocurrir:

1).-que solo haya un par de valores r,p. ; Se requiere que en la expresión:

$$b=2cd$$

el término d=1

$$r_6=b/2$$

$$p_6=1$$

en cuyo caso solo hay una terna con el valor $b=2r_6\ p_6$

2).-que puedan obtenerse más de un par de valores r,p. Se requiere que $b=2\cdot c\cdot d$, y que $d\neq 1$

$$b=2cd$$

$$r_{71}=b/2$$

$$p_{71}=1$$

……..

$$r_{72}=c/2$$

$$p_{72}=d$$

en cuyo caso solo hay dos ternas con el valor $b=2rp$

Se generan dos ternas con un único valor de b, con valores diferentes de x_1 x_2 a_1 a_2, ya que:

$$x_1= r_{71}^2 + p_{71}^2$$

$$a_1= r_{71}^2 - p_{71}^2$$

$$x_2= r_{72}^2 + p_{72}^2$$

$$a_2= r_{72}^2 - p_{72}^2$$

resultando:

$$x_1\neq a_1$$

$$x_1\neq a_2$$

$$x_2\neq a_1$$

$$x_2\neq a_2$$

La obtención de ternas primitivas se genera con los siguientes valores para r,p

r,p=(2,1), (2,3,),(4,1),(4,3), (6,1),~~(6,3),(8,1),(8,3)~~ ~~……~~

Ej: b=2(2)(1)=4

b=4; r=b/2, p=1, r,p=(2,1);

terna:

$x_1=r^2+p^2=5$

$a_{1=}\ r^2-\ p^2=3$

b=4

5,3,**4**

Para el valor b=4, solo existe una terna con dicho valor

…….

b=8; r=b/2, p=1, r,p=(4,1);

terna:

$x_1=r^2+p^2=17$

$a_{1=}\ r^2-\ p^2=15$

b=8

17,15,**8**

Para el valor b=8, solo existe una terna con dicho valor

……

Si b=2·2·3·5·=60, las ternas obtenidas serian.

terna con $r_1=30$, $p_1=1$

$x_1=r^2+p^2=901$

$a_{1=}\ r^2-\ p^2=899$

b=2·30=60

901,899,**60**

terna con $r_2=15$, $p_2=2$

$x_1=r^2+p^2=229$

$a_{1=}\ r^2-\ p^2=221$

$b=60$

229,221,**60**

terna con $r_2=10$, $p_2=3$

$x_1=r^2+p^2=109$

$a_{1=}\ r^2-\ p^2=91$

$b=60$

109,91,**60**

terna con $r_2=6$, $p_2=5$

$x_1=r^2+p^2=61$

$a_{1=}\ r^2-\ p^2=11$

$b=60$

61,11,**60**

Nota: cada par de valores r,p, cumplen con las condiciones impuestas, (tener como único divisor común la unidad, r>p, paridad contraria), por lo que las ternas obtenidas son todas primitivas.

Así, existe mas de una terna con el mismo valor de b, pero en estas ternas los distintos valores de x y de a no se repiten en ninguna de ellas.

E.-Generación de ternas donde x, ó a ó b es un cuadrado perfecto, un cubo perfecto, en definitiva un entero elevado a la enésima potencia

De acuerdo con lo visto anteriormente, existen ternas pitagóricas con un elemento (bien **x**, bien **a**, bien **b**) repetido una o más veces. Cuando **x**, ó **a**, ó **b**, son cuadrados perfectos, cubos perfectos o en definitiva enteros elevados a la enésima potencia, también existen **ternas** donde estas situaciones puedan darse.

a).- *Ternas primitivas con **x**=cuadrado perfecto, cubo perfecto, en definitiva un entero elevado a la enésima potencia. (**x**=impar)*

Siguiendo el procedimiento anterior, si en lugar de tomar dos pares de valores diferentes (r_1,p_1, r_2,p_2), para obtener dos ternas con x repetida, tomamos el mismo par de valores

$$r_1,p_1$$

$$r_1,p_1$$

y realizamos las mismas operaciones, se obtienen dos ternas, una de ellas no es una terna válida y en la otra **x** es un cuadrado perfecto.

Los pares de valores que generan las dos ternas son:

$$r_{31},p_{31}$$

$$r_{32},p_{32}$$

Así la primera terna a obtener:

$$r_{31}=(r_1 r_1+ p_1 p_1)$$

$$p_{31}=(r_1 p_1- p_1 r_1)=0$$

$$x= r_{31}^2+ p_{31}^2$$

$$r_{31}^2= (r_1^2 r_1^2+ p_1^2 p_1^2+2 r_{1,}p_1 r_1 p_1)=r_1^4+ p_1^4+2r_1^2 p_1^2$$

$$p_{31}^2=(r_1^2 p_2^2+ p_1^2 r_1^2-2 r_{1,}p_1 r_1 p_1)=0$$

$$x= r_{31}^2$$

$$a_1= r_{31}^2$$

$$b_1=2 r_{31} p_{31}=0$$

nos da una solución de terna no válida, ya que $x= a_{1,}$ y $b=0$

La segunda terna, si presenta una solución coherente, resultando x un cuadrado perfecto

$$r_{32}=(r_1 r_1 -p_1 p_1)$$

$$p_{32}=(r_1 p_1 + p_1 r_1)$$

$$r_{32}^2= (r_1^2-p_1^2)^2$$

$$p_{32}^2=(2r_1p_1)^2$$

$$\mathbf{x}= r_{32}^2+ p_{32}^2=(r_1^2-p_1^2)^2 +(2r_1p_1)^2 =\mathbf{(r_1^2 +p_1^2)^2}$$

$$a_2= r_{32}^2 -p_{32}^2=(r_1^2-p_1^2)^2 -(2r_1p_1)^2$$

$$b_2=2 r_{32} p_{32}=4 r_1 p_1(r_1^2 - p_1^2)$$

Se generan una terna con un valor de x, entero y cuadrado perfecto, para cualquier valor de r,p ya que:

$$x= r_{32}^2+ p_{32}^2 =\mathbf{(r_1^2 +p_1^2)^2}$$

pero con valores a, b que no son cuadrados perfectos para cualquier valor de r,p:

$$a =(r^2 - p^2)^2 -(2rp)^2= r^4+p^4 -2r^2p^2-4r^2p^2 *$$

*a no es Cuadrado perfecto para cualquier valor de r,p,

$$b=4 rp(r^2 - p^2)*$$

*b no es Cuadrado perfecto para cualquier valor de r,p;

ej. $x \cdot x = x^2$

Si tomamos r,p=(5,2),

Se generan dos ternas.

-primera terna

$$(r_1,p_1)=(5,2)$$

$$(r_1,p_1)=(5,2)$$

$$r_{31}=5\cdot 5+2\cdot 2=29$$

$$p_{31}=5\cdot 2-5\cdot 2=0$$

Esta terna generada con r,p (29,0), no se considera ya que conduce a:

$$x=29^2$$

$$a_1=29^2$$

$$b_1=0$$

…….

-segunda terna

$$r_{32}=5\cdot 5-2\cdot 2=21$$

$$p_{32}=5\cdot 2 + 5\cdot 2=20$$

$$x= r_{32}^2+ p_{32}^2=\mathbf{841=29^2}$$

$$a_2= r_{32}^2 - p_{32}^2=41$$

$$b_2=2\, r_{32}\, p_{32}=840$$

$$(\mathbf{29^2},41,840)$$

Esta segunda terna, x es un cuadrado perfecto, pero a_2,b_2, no lo son.

Si lo que se pretende es obtener una terna donde **x sea un cubo perfecto**, siguiendo el procedimiento, partimos de los pares:

$$r_{31},\ p_{31}$$

$$r_1,\ p_1$$

Los pares anteriores no se estudian porque el par r_{31}, p_{31}, genera una terna no válida

Si partimos de los pares:

$$r_{32}, p_{32}$$

$$r_{1,} p_1$$

Los pares anteriores generan dos ternas:

Primera terna:

$$r_{41=} r_1 r_{32} - p_1 p_{32}$$

$$r_{41}= r_1(r_1 r_1 - p_1 p_1) - p_1(r_1 p_1 + p_1 r_1)$$

$$\underline{r_{41=} r_1(r_1^2 - p_1^2) - (2 r_1 p_1^2)}$$

$$p_{41}= p_1(r_1 r_1 - p_1 p_1) - r_1(r_1 p_1 + p_1 r_1)$$

$$\underline{p_{41} = p_1(r_1^2 - p_1^2)} + \underline{(2r_1^2 p_1)}$$

$$r_{41}^2 = r_1^6 + 9p_1^4 r_1^2 - 6r_1^4 p_1^2$$

$$p_{41}^2 = p_1^6 + 9r_1^4 p_1^2 - 6r_1^2 p_1^4$$

$$\mathbf{x}= r_{41}^2 + p_{41}^2 = r_1^6 + 9p_1^4 r_1^2 - 6r_1^4 p_1^2 + p_1^6 + 9r_1^4 p_1^2 - 6r_1^2 p_1^4$$

$$\mathbf{x}= r_{41}^2 + p_{41}^2 = r_1^6 + 3r_1^4 p_1^2 + 3p_1^4 r_1^2 + p_1^6 = \mathbf{(r^2+p^2)^{3*}}$$

$$a= r_{41}^2 - p_{41}^2 (\text{no es un cubo})$$

$$b=2 r_{41}^2 p_{41}^2 (\text{no es un cubo})$$

*esta primera terna, es primitiva

segunda terna:

$$r_{42}=(r_1 r_{32}+ p_1 p_{32})$$

$$r_{42}= r_1(r_1 r_1 -p_1 p_1)+p_1(r_1 p_1 + p_1 r_1)$$

$$\underline{r_{42}= r_1(r_1^2 -p_1^2) +(2 r_1 p_1^2)}$$

$$p_{42}=(r_1 p_{32}- p_1 r_{32})=$$

$$p_{42}= r_1(r_1 p_1 + p_1 r_1)-p_1(r_1^2 -p_1^2)$$

$$\underline{p_{42} =(2r_1^2 p_1)- p_1(r_1^2 -p_1^2)}$$

$$r_{42}^2=r_1^6+9p_1^4r_1^2-6r_1^4p_1^2$$

$$p_{42}^2= p_1^6+9r_1^4p_1^2-6r_1^2p_1^4$$

$$\mathbf{x}= r_{42}^2+ p_{42}^2= r_1^6+9p_1^4r_1^2-6r_1^4p_1^2+ p_1^6+9r_1^4p_1^2-6r_1^2p_1^4$$

$$\mathbf{x}= r_{42}^2+ p_{42}^2= r_1^6+3r_1^4p_1^2 +3p_1^4r_1^2 + p_1^6 =\mathbf{(r^2+p^2)^{3*}}$$

$$a= r_{42}^2 -p_{42}^2(\text{no es un cubo})$$

$$b=2 r_{42}^2 p_{42}^2(\text{no es un cubo})$$

*Esta segunda terna no es primitiva, ya que r_{42} y p_{42} tienen como divisor común el termino $\mathbf{r_1^2+p_1^2}$

En efecto:

$$\underline{r_{42}= r_1(r_1^2 -p_1^2) +(2 r_1 p_1^2)}$$

$$\underline{r_{42}= r_1^3 -r_1 p_1^2 +2 r_1 p_1^2= r_1^3+r_1 p_1^2}$$

$$\underline{r_{42}= r_1\mathbf{(r_1^2 +p_1^2)= r_1^3}+r_1 p_1^2}$$

$$\underline{p_{42} =(2r_1^2 p_1)- p_1(r_1^2 -p_1^2)}$$

$$\underline{p_{42} =(2r_1^2 p_1)- p_1 r_1^2}+p_1^3=p_1^3+\underline{p_1 r_1^2}$$

$$\underline{p_{42}= p_1\mathbf{(r_1^2 +p_1^2)= p_1^3}+p_1 r_1^2}$$

Ej. $x^3=x^2x$

Pares de valores x^2 (5,2), (5,2)

$r_{3,1}=29, p_{31}=0; (29,0)$

*No se estudian los pares

r_{31}, p_{31}

$r_{1,} p_1$

porque el par(r_{31}, p_{31}) genera una terna no valida

$r_{3,2}=21, p_{32}=20; (21,20)$

Terna 29^2,41,840

Terna primitiva

pares de valores para $x^3=x^2x$

primera terna primitiva (r_{41}, p_{41})

r_{32}, p_{32} (21,20)

$r_{1,} p_1$ (5,2)

$r_{41=}$ $r_{41=}$ $r_1(r_1^2 -p_1^2)-(2 r_1 p_1^2)$

$r_{41}=5\cdot21-2\cdot5\cdot4=65$ *

$p_{41}= p_1(r_1^2 -p_1^2) +(2r_1^2 p_1)$

$p_{41}=21\cdot2+2\cdot25\cdot2=142$

$x=65^2+142^2=\mathbf{24389}=\mathbf{29^3}$

$a=142^2- 65^2=15939$

$b=2\cdot142\cdot65=18460$

Segunda terna no primitiva (r_{42}, p_{42})

$r_{42=} r_1(r_1^2 +p_1^2)$

$r_{42}=29\cdot5=145$

$p_{42=} p_1(r_1^2 +p_1^2)$

$p_{42}=29\cdot2=58$

$$x=145^2+58^2=\mathbf{24389}=\mathbf{29^3}$$

$$a=145^2-58^2=17661$$

$$b=2\cdot145\cdot58=16820$$

(terna no primitiva: divisor común 29)

El procedimiento se puede continuar obteniendo ternas en las que un x sea un bicuadrado, un entero elevado a la quinta potencia etc.

Se acompañan unos ejemplos explicativos

Si lo que se pretende es obtener una terna donde **x sea un bicuadrado**, siguiendo el procedimiento, partimos de los pares:

$$r_{41},\ p_{41}$$

$$r_{1},\ p_{1}$$

estos dos pares de valores generan dos ternas:

Ej. $x^4=x^3x$

$$r_{41},\ p_{41=(65,142)}$$

$$r_{1},\ p_{1=(5,2)}$$

$$r_{51}=65\cdot5+142\cdot2=609$$

$$p_{51}=142\cdot5-65\cdot2=580$$

$$x=609^2+580^2=\mathbf{707281}=\mathbf{29^4}$$

$$a=609^2-580^2=34481$$

$$b=2\cdot609=16820\cdot580=706440$$

Esta terna x,a,b no es primitiva porque r_{51} y p_{51} tienen como divisor común además de la unidad a 29

……

$$r_{61}=65\cdot5-142\cdot2=41$$

$$p_{61}=142\cdot5+65\cdot2=840$$

$$x=41^2+840^2=\mathbf{707281}=\mathbf{29^4}$$

$$a=840^2-41^2=703919$$

$$b=2\cdot840\cdot41=68880$$

Esta terna si es primitiva. donde a y b no son bicuadrados

También se podría haber obtenido con la descomposición:

$\mathbf{x^4=x^2x^2}$

Tomamos el par r,p que genera la la t. primitiva para x_2: (21,20)

Se generan dos ternas:

$r_{61}=(21\cdot 21+20\cdot 20)=841$

$p_{61}=(\ (21\cdot 20-21\cdot 20)=0$

(841,0)⟶este par de valores r,p genera una terna no valida.

$r_{62}=\ (21\cdot 21-20\cdot 20)=41$

$p_{62}=(21\cdot 20\ +21\cdot 20)=840$

(41,840)⟶este par de valores r,p genera una terna primitiva.

$$x=41^2+840^2=707281=\mathbf{29^4}$$

$$a=840^2-41^2=703919$$

$$b=2\cdot 840\cdot 41=68880$$

donde a y b no son bicuadrados

Continuando, para cualquier par de valores r,p, y para n=5, descomponiendo:

$$\mathbf{x^5=x^4x}$$

$$\mathbf{x^5=x^3x^2}$$

y utilizando el mismo procedimiento, se obtiene una terna primitiva donde x es un entero elevado a la quinta potencia, pero a, y b no son enteros.

Estos resultados también se obtienen, aplicando lo señalado en el epígrafe B: Así se puede obtener la terna donde $x=29^3$, aplicando:

$$r=s^3-3st^2$$

$$p=3s^2\,t-t^3$$

con el par s,t=5,2

$$r=65$$

$$p=142$$

$$29^3=142^2+65^2$$

$$a=142^2-65^2$$

$$b=2(142)(65)$$

Ej. $x^2=65^2$; Se generan dos ternas:

Primera terna

$65^2=r_1^2+p_1^2$;

$a_1= r_1^2-p_1^2$

$b_1=2\ r_1\ p_1$

$r_1=s_1^2-t_1^2$

$p_1=2s_1t_1$

El par s_1,t_1 se obtiene de:

$65= s_1^2+t_1^2$; $s_1=8$, $t_{1=1}$

$r_1=s_1^2-t_1^2=63$

$p_1=2s_1t_1=2(8)(1)=16$

$\mathbf{65^2}=r_1^2+p_1^2 =63^2+16^2 =\mathbf{4225}$

$a_1= r_1^2-p_1^2=63^2-16^2=3713$

$b_1= 2\ r_1\ p_1=2(63)(16)=2016$

a_1,b_1 no son cuadrados perfectos.

Segunda terna

$65^{2=}\ r_2^2+p_2^2$

$a_2= r_2^2-p_2^2$

$b_2=2\ r_2\ p_2$

$r_2=s_2^2+t_2^2$

$p_2=2s_2t_2$

El par s_2,t_2 se obtiene de:

$65= s_2^2+t_2^2$; $s_2=7$, $t_{2=}4$

$r_2=s_2^2-t_2^2=33$

$p_2=2s_2t_2=2(7)(4)=56$

$\mathbf{65^2}=r_2^2+p_2^2=33^2+56^2=\mathbf{4225}$

$a_2= p_2^2-r_1^2=56^2-33^2=2047$

$b_2= 2\ r_2\ p_2=2(33)(56)=3696$

Con este último ejemplo se comprueba que también existen dos o mas ternas donde x es un cuadrado perfecto

b).- *Ternas primitivas con **a**=cuadrado perfecto, cubo perfecto, en definitiva un entero elevado a la enésima potencia. (**a**=impar)*

Todo impar **a** se puede expresar como el producto de dos impares.

Si a es primo:

$$a^n=a^n\cdot 1$$

Si a no es primo:

$$a^n=c^c\cdot d^n$$

(c,d=impares)

En el primer caso, (a=primo) el par de valores r,p que generan **a**, de acuerdo a la ecuación:

$$a^n= r^2- p^2$$

son:

$$r_{51}=(a^n+1)/2$$

$$p_{51}=(a^n-1)/2$$

Ej a=15; n=3; $a^3=15^3\cdot 1$

$r_{51}=1688$

$p_{51}=1687$

generándose:

$$x_1^n = r_{51}^2 + p_{51}^2$$

$$a^n = r_{51}^2 - p_{51}^2$$

$$b_1^n = 2\, r_{51}\, p_{51}$$

En la terna generada, **a** es un entero elevado a la enésima potencia

$$r_{51}^2 - p_{51}^2 = a^n$$

$$r_{51}^2 + p_{51}^2 = x_1^n \ (x_1 \text{ no es entero})$$

$$2\, r_{51}\, p_{51} \neq b_1^n \ (b_1 \text{ no es entero})$$

Ej $a=15$; $n=3$; $a^3 = 15^3 \cdot 1$

$r_{51}=1688$

$p_{51}=1687$

$x_1^3 = r_{51}^2 + p_{51}^2 = 5695313$ (x_1 no es entero)

$b_1^3 = 2\, r_{51}\, p_{51} = 5695312$ (b_1 no es entero)

Restando:

$$x_1^3 - b_1^3 = 1$$

resultando imposible que x_1 y b_1, sean enteros

En el segundo caso, (**a≠primo, a=cd**) los pares de valores r,p, que generan **a**, de acuerdo a la ecuación

$$a^n = c^n \cdot d^n = r^2 - p^2$$

son:

$$r_{52} = (c^n + d^n)/2$$

$$p_{52} = (c^n - d^n)/2$$

Ej $a=5\cdot3$; $n=3$; $15^3=5^3\cdot3^3$

$r_{52}=(5^3+3^3)/2=76$

$p_{52}=(5^3-3^3)/2=49$

generándose:

$$x_2{}^n = r_{52}{}^2 + p_{52}{}^2$$

$$a^n = r_{52}{}^2 - p_{52}{}^2$$

$$b_2{}^n = 2\, r_{52}\, p_{52}$$

$x_2{}^3 = r_{52}{}^2 + p_{52}{}^2 = 8177$ (x_2 no es entero)

$a^3 = r_{52}{}^2 - p_{52}{}^2 = 3375$

$b_2{}^3 = 2\, r_{52}\, p_{52} = 7488$ (b_2 no es entero)

En la terna generada, **a** es un entero elevado a la enésima potencia

$$r_{52}{}^2 - p_{52}{}^2 = a^n$$

$$r_{52}{}^2 + p_{52}{}^2 = x_2{}^n \ (x_2 \text{ no es entero})$$

$$2\, r_{52}\, p_{52} \neq b_2{}^n \ (b_2 \text{ no es entero})$$

Estos resultados también se obtienen, aplicando lo señalado en el epígrafe B: Así se puede obtener la terna donde $a=15^3$, aplicando:

$$r=s^3+3st^2$$

$$p=3s^2t+t^3$$

con el par s,t=4,1

$$r=s^3+3st2=76$$

$$p=3s^2t+t3=49$$

$$15^3=76^2-49^2$$

$$x=76^2+49^2(\text{ x no es un cubo perfecto})$$

$$b=2\cdot 276\cdot 49 \text{ (b no es un cubo perfecto)}$$

s,t=4,1, se obtiene de $a=s^2-t^2=15$

con el par s,t=8,7

$$r=s^3+3st^2=1688$$

$$p=3s^2t+t3=1687$$

$$15^3=1688^2-1687^2$$

$$x=1688^2+1687^2 \text{ (x no es un cubo perfecto)}$$

$$b=2\cdot 1688\cdot 1687 \text{ (b no es un cubo perfecto)}$$

s,t=8,7, se obtiene de $a=s^2-t^2=5\cdot 3=15$

c).- *Ternas primitivas con **b**=cuadrado perfecto, cubo perfecto, en definitiva un entero elevado a la enésima potencia. (**b**=par)*

En este caso, encontraremos los valores de r,p, en función de s,p que cumplen:

$$b^m=2rp$$

La obtención de los valores de r y de p en función de s,t es inmediata:

$$b=2st$$

$$b^m=s^mt^m=2rp$$

$$r= s^m/2$$

$$p=t^m$$

En la generación de ternas primitivas:

$$s=par$$

$$t=impar$$

$$m\geq 2$$

Los pares de valores s,t son:

(2,1) (3,2) (4,1) (4,3) (5,2) (5,4) (6,1) ~~(6,3)~~ (6,5) (7,2) (7,4) (7,6)……

que ordenados de acuerdo con las condiciones:

$$s=par$$

$$t=impar$$

los expresamos:

s,t=(2,1) ,(2,3) ,(4,3) ,(4,1) ,(4,5) ,(2,5) ,(6,5) ,~~(6,3)*~~ ,(6,1) ,(6,7) ,(4,7)……..

~~(6,3)~~ Se elimina porque genera una terna no primitiva

En el proceso de generación de ternas primitivas, se puede distinguir:

1.-Ternas donde:

$$t=1$$

resultando:

$$r= s^m/2=b^m/2$$

$$p= t^m =1$$

Así, las ternas:

$$x^m= r^2 + p^2$$

$$a^m= r^2– p^2$$

$$b^m=2rp$$

que satisfacen la ecuación:

$$x^{2m}–a^{2m}=b^{2m}$$

se resuelven:

$$x^m= r^2 + p^2=(b^{2m}/4)+1 \qquad (1)$$

$$a^m= r^2– p^2=(b^{2m}/4)– 1 \qquad (2)$$

$$b^m=2rp= b^m \qquad (3)$$

En estas ternas se comprueba que, para valores enteros de b, los valores de x y de a no son enteros.

Si se restan las ecuaciones (1)y (2):

$$x^m– a^m=2$$

No existen valores enteros de x y de a que cumplan dicha ecuación. La diferencia de cualquier par de valores x,a enteros elevados a la potencia m, es mayor de 2.

Asi:

$m=2, x=5, a=3 \longrightarrow 25\text{-}9=16>2$

2.-Ternas donde:

$$t=\text{un impar diferente de la unidad.}$$

$$s,t \text{ tienen como único divisor común la unidad}$$

En este caso:

$$r= s^m/2$$

$$p=t^m$$

y las ternas se resuelven:

$$x^m= r^2 + p^2=(s^{2m}/4)+t^{2m}$$

$$a^m= r^2- p^2=(s^{2m}/4)- t^{2m}$$

$$b^m=2rp=s^m t^m$$

operando:

$$x^m= t^{2m} ((s^{2m}/4\ t^{2m})+1)$$

$$a^m= t^{2m} ((s^{2m}/4\ t^{2m})-1\ )$$

Como s,t, tienen como único denominador común la unidad, la evaluación de las expresiones:

$$(s^{2m}/4\ t^{2m})+1$$

$$(s^{2m}/4\ t^{2m})-1)$$

generan números racionales no enteros, y por tanto las expresiones:

$$[(s^{2m}/4\ t^{2m})+1]^{1/m}$$

$$[(s^{2m}/4\ t^{2m})-1)]^{1/m}$$

generan números irracionales.

El carácter irracional de las expresiones anteriores no se elimina, multiplicando ambas por t^2

$$t^2\,[(s^{2m}/4\,t^{2m})+1]^{1/m}$$

$$t^2\,[(s^{2m}/4\,t^{2m})-1)]^{1/m}$$

Como:

$$x= t^2\,((s^{2m}/4\,t^{2m})+1)^{1/m}$$

$$a= t^2\,((s^{2m}/4\,t^{2m})-1)\,^{1/m}$$

Se concluye que para valores de **b**=enteros, los valores de **x**, y **a** no son enteros

Ej: $b=12^3=12^3\cdot1=4^3\cdot3^3$

Se generan dos ternas:

1º terna:

$b=12^3\cdot1$

$r=12^3/2$

$p=1$

$x_1=12^6/4+1=746497$

$a_1=12^6/4-1=746495$

$b^3=12^3=$**1728**

En esta primera terna la demostración de que x_1 y a_1 **no** son cubos perfectos es inmediata, sin necesidad de realizar su raíz cubica. Así si restamos las ecuaciones:

$$x_1=12^6/4+1$$

$$a_1=12^6/4-1$$

resulta:

$$x_1-a_1=2$$

y la diferencia de dos enteros impares elevados al cubo es mayor que 2, por lo que ambos **no** son cubos perfectos.

2º terna:

$b^3=4^3\cdot3^3=$ $b^m=2rp=s^mt^m$

$s=4;\ t=3$

$r=4^3/2$

$p=3^3$

$x_2=4^6/4+3^6=1753$

$a_2=4^6/4-3^6=295$

$b^3=12^3=\mathbf{1728}$

En esta segunda terna la demostración de que x_2 y a_2 no son cubos perfectos la realizamos de la siguiente forma:

$$x_2=3^6\ (4^6/4\cdot 3^6+1)$$

$$a_2=3^6\ (4^6/4\cdot 3^6-1)$$

Las expresiones:

$$(4^6/4\cdot 3^6+1)$$

$$(4^6/4\cdot 3^6-1)$$

no generan números enteros:

$$(4^6/(4\cdot 3^6)+1)=\ 2.404663923$$

$$(4^6/(4\cdot 3^6)-1)=0.4046639232$$

Y en ningún caso los generaran, ya que cuando $b^3=\ b^m=2rp=s^mt^m$

con **s** y **t** con la unidad como único divisor común, las expresiones:

$$(s^6/4\cdot t^6+1)$$

$$(s^6/4\cdot t^6-1)$$

nunca generan números enteros.

Su raíz enésima genera números irracionales.

$$(s^6/4\cdot t^6+1)^{1/3}$$

$$(s^6/4\cdot t^6-1)^{1/3}$$

$$(4^6/(4\cdot 3^6)+1)^{1/3}=1.339732612....$$

$$(4^6/(4\cdot 3^6)-1)^{1/3}\ 0.7396589146.....$$

Y la irracionalidad no desaparece al multiplicar por t^2

$$t^2(s^6/4\cdot t^6+1)$$

$$t^2(s^6/4\cdot t^6- 1)$$

$$3^2(4^6/(4\cdot 3^6)+1)^{1/3} =12.05759351...$$

$$3^2(4^6/(4\cdot 3^6)-1)^{1/3} =6.566930231....$$

Por lo que en cualquier caso x_1, a_1, no serán enteros

3._El resto de ternas que se generan cuando:

$$b^n= c\cdot d$$

donde **c, d** son divisores de b, distintos de la unidad, pero **c** y **d** tienen otros divisores comunes además de la unidad.

En estos casos las ternas que se obtienen no son primitivas

Se concluye que para valores de **b**=enteros, los valores de **x**, y **a** no son enteros

Ej6: b=18; n=5; $18^5=209952\cdot 9$

$$18^5=209952\cdot 9$$

$$c=209952$$

$$d=9$$

$$x^5=209952^2/4+9^2$$

$$a^5=209952^2/4-9^2$$

Los elementos de la terna:

$$x^5, a^5, b^5$$

son divisibles por 9, ya que c=209952 y d=9, son divisibles por 9, lo que indica que la terna no es primitiva

Alicante a 7 de septiembre de 2026

Para comentarios exclusivamente relacionados con el tema:

e-mail miguelariasfernandez7@gmail.com